

بررسی اثر پخش عددی بر دقت حل معادلات آب کم عمق

سرمد قادر^۱ وحید اصفهانیان^۲

^۱ استادیار گروه فیزیک فضا، موسسه ژئوفیزیک دانشگاه تهران

^۲ دانشیار دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه تهران

چکیده هنگام حل عددی شکل اویلری معادلات آب کم عمق می‌بایست ناپایداری غیرخطی را کنترل و از بروز آن جلوگیری نمود. در یک راه حل رایج که در شبیه‌سازی شارش‌های متلاطم دوبعدی نیز به کار گرفته می‌شود، یک جمله فرایخش به معادله تاوایی اضافه می‌شود. استفاده از جمله مذکور برای روش‌های عددی متفاوت به صورت واحد صورت نمی‌گیرد و با توجه به نوع روش حداکثر توان مورد نیاز برای این جمله متفاوت است. در تحقیق حاضر چهار روش با توانایی تفکیک بالا یعنی روش‌های فشرده ترکیبی تعمیم یافته مرتبه ششم، آب‌فشرده مرتبه ششم، فشرده مرتبه چهارم و طیفی وار برای حل عددی معادلات آب کم عمق در صفحه f مورد استفاده قرار می‌گیرند. ابتدا نشان داده می‌شود که در دقت حل عددی حاصل از روش‌های مذکور میزان پخش عددی اضافه شده، نقش مهمی را بازی می‌کند. در ادامه با معرفی یک پالایه فشرده یک راه حل جایگزین برای کنترل ناپایداری غیرخطی در روش‌های فشرده ارائه می‌شود. همچنین نشان داده می‌شود که با استفاده از این پالایه میزان پخش عددی اضافه شده به حل کاهش یافته و در نتیجه جواب‌های حاصل از روش‌های فشرده ترکیبی تعمیم یافته و آب‌فشرده مرتبه ششم در مقایسه با روش طیفی وار از دقت بالاتری برخوردار می‌شوند. نتایج حاصل، از دیدگاه عدم توازن نیز مورد بررسی و تحلیل قرار می‌گیرند.

واژه‌های کلیدی: روش‌های فشرده، روش طیفی وار، دقت عددی، پخش عددی، معادلات آب کم عمق

۱ مقدمه

هنگام حل عددی شکل اویلری معادلات آب کم عمق بر حسب متغیرهای تاوایی، واگرایی و ارتفاع (یا متغیرهای وابسته دیگر) می‌بایست ناپایداری غیرخطی را در حل عددی کنترل و از بروز آن جلوگیری نمود. یک راه حل رایج که در شبیه‌سازی عددی شارش‌های متلاطم دوبعدی نیز به کار گرفته می‌شود، شامل اضافه کردن یک جمله فرایخش^۱ به معادله تاوایی است. در واقع این جمله فرایخش یک روش پخشندگی پیچکی^۲ خطی ساده است که در شبیه‌سازی‌های جوی و اقیانوسی مورد استفاده قرار می‌گیرد. وظیفه اصلی این جمله فرایخش از دیدگاه عددی، حفظ پایداری حل و جلوگیری از وقوع ناپایداری غیرخطی در طی انتگرال‌گیری از معادلات است. ولی نکته‌ای که هنوز تحقیقات دقیقی در مورد آن انجام نشده، این مطلب است که اضافه کردن جمله مذکور به معادلات، چه آسیبی به فیزیک مسئله مورد بررسی می‌زند.

در تحقیق حاضر این مطلب از دیدگاه دیگری مورد توجه و بررسی قرار می‌گیرد. تجربیات به دست آمده نشان می‌دهند که هرچه بتوان توان جمله فرایخش را بزرگتر گرفت، میزان پخش وارد شده به حل عددی معادلات کمتر شده و در واقع دقت حل عددی کمتر تحت تاثیر پخش اضافه شده، قرار گرفته و از طرف دیگر حل به دست آمده به جواب‌های واقعی نزدیکتر خواهد بود. تجربیات حاصل از تحقیقات محققان مختلف و همچنین مولفان مقاله حاضر نشان داده است که برای یک روش عددی معین حداقلی از پخش عددی مورد نیاز است و بنابراین می‌بایست به دنبال بهینه‌ترین حالت برای میزان پخش مورد نیاز برای حل عددی بود.

در سال‌های اخیر استفاده از روش‌های با دقت و توانایی تفکیک بالا از جمله روش‌های فشرده و طیفی امکان شبیه‌سازی دقیق‌تر شارش‌های جوی و اقیانوسی را فراهم آورده است. ولی از طرفی در اغلب فرمول‌بندی‌های رایج معادلات حاکم جوی و اقیانوسی و از جمله آنها معادلات آب کم عمق، همان‌گونه که در بالا به آن اشاره شد، نیاز است تا از یک میزان حداقلی پخش عددی برای حفظ پایداری حل استفاده نمود که همین مطلب کارایی و دقت بالای روش‌های طیفی و فشرده را تحت تاثیر قرار می‌دهد.

مقاله حاضر به بررسی و یافتن راه حل مناسبی برای رسیدن به میزان پخش (فراپخش) بهینه در حل معادلات آب کم عمق با استفاده از روش های فشرده اختصاص دارد. در تحقیق حاضر برای حل معادلات آب کم عمق و گسسته سازی مکانی آنها از روش های فشرده ترکیبی تعمیم یافته مرتبه ششم، آبرفشرده مرتبه ششم، فشرده مرتبه چهارم، مرتبه دوم مرکزی و طیفی وار استفاده می شود. نشان داده می شود که برای رسیدن به فراپخش بهینه در روش های فشرده مرتبه ششم مورد مطالعه می بایست از یک پالایه بر مبنای روش های فشرده با مرتبه دقت بالاتر از حل عددی استفاده نمود. همچنین با محاسبه خطاهای حل عددی معادلات از دیدگاه های متفاوت تاثیر میزان پخش پیشنهادی بر دقت حل عددی معادلات مورد بررسی بیشتر قرار می گیرد.

۲ طرحواره های عددی

همان گونه که اشاره شد هدف اصلی در تحقیق حاضر بررسی تاثیر میزان پخش مورد نیاز برای پایداری حل عددی معادلات آب کم عمق بر دقت حل عددی است. در این بخش روش های عددی به کار رفته برای گسسته سازی مکانی معادلات آب کم عمق که همگی آنها در زمره روش های با توانایی تفکیک بالا هستند، ارائه می شود. این روش های شامل سه روش از خانواده روش های فشرده یعنی روش فشرده ترکیبی تعمیم یافته مرتبه ششم (قادر و اصفهانیان ۲۰۰۶)، آبرفشرده مرتبه ششم (اصفهانیان و همکاران ۲۰۰۵)، فشرده مرتبه چهارم و روش طیفی وار (دریچل و همکاران ۱۹۹۹) هستند. در ادامه فرمول بندی مربوط به روش های فشرده ذکر می شود. جزئیات مربوط به نحوه به دست آوردن روابط روش فشرده ترکیبی تعمیم یافته توسط قادر و اصفهانیان (۲۰۰۶) بیان شده است و در اینجا تنها حالت کلی روابط این روش برای شبکه های غیر یکنواخت و همچنین روابط مرتبه ششم در شبکه یکنواخت ارائه می شوند. روابط روش فشرده ترکیبی تعمیم یافته را می توان در شکل برداری زیر خلاصه نمود:

$$(Q + L)F_j = E\phi_j \quad (1)$$

بردارها و ماتریس های موجود در رابطه بالا به صورت زیر تعریف می شوند:

$$F = \{ \phi^{<1>}, \phi^{<2>}, \phi^{<3>}, \dots, \phi^{<N>} \}^T, \quad E = \{ \Delta_x^{\circ}, \Delta_x^{\gamma}, \circ, \circ, \dots, \circ \}^T$$

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{1+\sigma}{1!} & \frac{1-\sigma^2}{2!} & \dots & \frac{1+(-1)^{N+1}\sigma^N}{N!} \\ \frac{1-\sigma}{1!} & \frac{1+\sigma^2}{2!} & \dots & \frac{1+(-1)^N\sigma^N}{N!} \\ \circ & \frac{1+\sigma}{1!} & \dots & \frac{1+(-1)^N\sigma^{N-1}}{(N-1)!} \\ \circ & \frac{1-\sigma}{1!} & \dots & \frac{1+(-1)^{N-1}\sigma^{N-1}}{(N-1)!} \\ \circ & \circ & \dots & \frac{1+(-1)^{N-1}\sigma^{N-2}}{(N-2)!} \\ \circ & \circ & \dots & \frac{1+(-1)^{N-2}\sigma^{N-2}}{(N-2)!} \\ \circ & \circ & \dots & \dots \end{pmatrix}, \quad L = \begin{pmatrix} \circ & \circ & \dots & \circ \\ \circ & \circ & \dots & \circ \\ -\Delta_x^{\circ} & \circ & \dots & \circ \\ -\Delta_x^{\gamma} & \circ & \dots & \circ \\ \circ & -\Delta_x^{\circ} & \dots & \circ \\ \circ & -\Delta_x^{\gamma} & \dots & \circ \\ \circ & \circ & \dots & \circ \\ \circ & \circ & \dots & \circ \end{pmatrix}$$

همچنین در روابط روش فاصله شبکه ای به صورت $d_j = x_{j+1} - x_j$ و از قراردادهای زیر

$$\Delta_x^{\pm} \phi_j = \pm(\phi_{j\pm 1} - \phi_j), \quad \Delta_x^{\gamma} = \Delta_x^+ \Delta_x^- = \Delta_x^- \Delta_x^+, \quad \Delta_x^{\circ} = \Delta_x^+ + \Delta_x^-, \quad \sigma_j = \frac{d_{j-1}}{d_j}, \quad \phi_j^{<k>} = d_j^k \left(\frac{\partial^k \phi}{\partial x^k} \right)_j$$

استفاده شده است.

روابط مرتبه ششم روش فشرده ترکیبی تعمیم یافته در یک شبکه یکنواخت به صورت زیر به دست خواهند آمد:

$$\begin{aligned} (\Delta_x^+ + \Delta_x^-) \phi_j &= \frac{\gamma}{1!} \phi_j^{<1>} + \frac{\gamma}{3!} \phi_j^{<3>} + \frac{\gamma}{5!} \phi_j^{<5>} \\ (\Delta_x^+ - \Delta_x^-) \phi_j &= \frac{\gamma}{2!} \phi_j^{<2>} + \frac{\gamma}{4!} \phi_j^{<4>} + \frac{\gamma}{6!} \phi_j^{<6>} \\ \phi_{j+1}^{<1>} - \phi_{j-1}^{<1>} &= \frac{\gamma}{1!} \phi_j^{<2>} + \frac{\gamma}{3!} \phi_j^{<4>} + \frac{\gamma}{5!} \phi_j^{<6>} \\ \phi_{j+1}^{<1>} - 2\phi_j^{<1>} + \phi_{j-1}^{<1>} &= \frac{\gamma}{2!} \phi_j^{<3>} + \frac{\gamma}{4!} \phi_j^{<5>} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\phi_{j+1}^{<2>} - \phi_{j-1}^{<2>} &= \frac{2}{1!}\phi_j^{<3>} + \frac{2}{3!}\phi_j^{<5>} \\ \phi_{j+1}^{<2>} - 2\phi_j^{<2>} + \phi_{j-1}^{<2>} &= \frac{2}{2!}\phi_j^{<4>} + \frac{2}{4!}\phi_j^{<6>}\end{aligned}$$

مجموعه روابط بالا را می‌توان به صورت زیر ساده نمود:

$$\begin{aligned}\frac{7}{16}(\phi'_{j+1} + \phi'_{j-1}) + \phi'_j - \frac{d}{16}(\phi''_{j+1} - \phi''_{j-1}) &= \frac{15}{16d}(\phi_{j+1} - \phi_{j-1}) \\ \frac{9}{8d}(\phi'_{j+1} - \phi'_{j-1}) + \phi''_j - \frac{1}{8}(\phi''_{j+1} + \phi''_{j-1}) &= \frac{3}{d^2}(\phi_{j+1} - 2\phi_j + \phi_{j-1})\end{aligned}\quad (2)$$

همچنین برای حل معادلات آب کم عمق و گسسته‌سازی مکانی آنها از روش آبرفشرده مرتبه ششم نیز استفاده می‌شود. روابط این روش برای مشتقات فرد به صورت

$$\phi_{j+1} - \phi_{j-1} - 2df'_j - \frac{1}{6}d^3\phi'''_{j-1} - \frac{3}{1}d^3\phi'''_j - \frac{1}{6}d^3\phi'''_{j+1} = 0\quad (3)$$

$$\phi'_{j+1} - 2\phi'_j + \phi'_{j-1} - \frac{1}{12}d^2\phi'''_{j-1} - \frac{5}{6}d^2\phi'''_j - \frac{1}{12}d^2\phi'''_{j+1} = 0$$

و برای مشتقات زوج به صورت زیر هستند:

$$\phi_{j+1} - 2\phi_j + \phi_{j-1} - d^2f''_j - \frac{1}{36}d^4\phi''''_{j-1} - \frac{7}{9}d^4\phi''''_j - \frac{1}{36}d^4\phi''''_{j+1} = 0\quad (4)$$

$$\phi''_{j+1} - 2\phi''_j + \phi''_{j-1} - \frac{1}{12}d^2\phi''''_{j-1} - \frac{5}{6}d^2\phi''''_j - \frac{1}{12}d^2\phi''''_{j+1} = 0$$

روابط فشرده مرتبه چهارم برای تخمین مشتقات اول و دوم به صورت زیر نوشته می‌شوند:

$$\frac{1}{6}\phi'_{j+1} + \frac{2}{3}\phi'_j + \frac{1}{6}\phi'_{j-1} = \frac{1}{2d}(\phi_{j+1} - \phi_{j-1})\quad (5)$$

$$\frac{1}{12}\phi''_{j+1} + \frac{5}{6}\phi''_j + \frac{1}{12}\phi''_{j-1} = \frac{1}{d^2}(\phi_{j+1} - 2\phi_j + \phi_{j-1})\quad (6)$$

۳ معادلات آب کم عمق

در تحقیق حاضر معادلات آب کم عمق در صفحه f بر حسب متغیرهای ناوایی (ζ) ، واگرایی (δ) و ارتفاع (h) به صورت زیر در نظر گرفته می‌شوند (دریچل و همکاران ۱۹۹۹):

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = -\nabla \cdot [(\zeta + f)\mathbf{V}]\quad (7)$$

$$\frac{\partial \delta}{\partial t} + \mathcal{H}h' = f(\zeta - fh') + 2J(u, v) - \nabla \cdot (\mathbf{V}\delta)\quad (8)$$

$$\frac{\partial h'}{\partial t} + \delta = -\nabla \cdot (\mathbf{V}h')\quad (9)$$

در معادلات بالا پارامتر کوریولیس با f و بردار باد افقی با $\mathbf{V} = (u, v)$ نشان داده شده‌اند و \mathcal{H} بیان‌کننده عملگر هلمهولتز است که و به صورت $\mathcal{H} = g\bar{h}\nabla^2 - f^2$ تعریف می‌شود. همچنین برای بیان ارتفاع از متغیر جدید h' به صورت $h = \bar{h} + \hat{h}$ استفاده شده‌است.

هنگام حل عددی این معادلات با استفاده از روش نیمه‌ضمنی (ریچه ۱۹۸۸) فرمول‌بندی می‌شوند. در روش مذکور لازم است تا با جملات مسئول انتشار امواج گرانی (یعنی گرادیان فشار و واگرایی) در معادلات آب کم عمق به صورت خاصی برخورد نمود. جملات مسئول انتشار امواج گرانی در معادلات واگرایی و ارتفاع وجود دارند و به همین دلیل روش نیمه‌ضمنی تنها به این معادلات اعمال می‌شود. برای ساده‌سازی می‌توان معادله (۹) را به صورت زیر دوباره‌نویسی کرد:

$$\frac{\partial h'}{\partial t} + \delta = s_h, \quad s_h = -\nabla \cdot (\mathbf{V}h')\quad (10)$$

حال با استفاده از روش لیپ‌فراگ برای گسسته‌سازی زمانی و استفاده از فرمول‌بندی نیمه‌ضمنی برای جمله واگرایی معادله (۱۰) به صورت زیر در خواهد آمد:

$$\frac{h'^{n+1} - h'^{n-1}}{2\Delta t} + \frac{\delta^{n+1} + \delta^{n-1}}{2} = s_h^n$$

در این معادله بالانویس n نشان‌دهنده مرحله زمانی است. معادله بالا را می‌توان به صورت زیر ساده نمود:

$$h'^{n+1} = h'^{n-1} - \Delta t(\delta^{n+1} + \delta^{n-1}) + 2\Delta t s_h^n \quad (11)$$

برای گسسته‌سازی معادله واگرایی نیز مشابه معادله ارتفاع عمل می‌کنیم. ابتدا برای ساده‌سازی می‌توان معادله (۸) را به صورت زیر نوشت:

$$\frac{\partial \delta}{\partial t} + \mathcal{H}h' = s_\delta, \quad s_\delta = f(\zeta - fh') + 2J(u, v) - \nabla \cdot (\mathbf{V}\delta) \quad (12)$$

گسسته‌سازی زمانی معادله (۱۲) و استفاده از فرمول‌بندی نیمه‌ضمنی برای ارتفاع همراه با ساده‌سازی نتیجه زیر را به دست می‌دهد:

$$\delta^{n+1} = \delta^{n-1} - \Delta t \mathcal{H}(h'^{n+1} + h'^{n-1}) + 2\Delta t s_h^\delta \quad (13)$$

در معادلات (۱۱) و (۱۳) متغیرهای ارتفاع و واگرایی در زمان $n+1$ در هر دو معادله وجود دارند این مطلب حل عددی را مشکل می‌سازد و بنابراین مناسب است که در معادله تنها یک متغیر در زمان $n+1$ وجود داشته باشد. با انجام عملیات جبری می‌توان دو معادله مورد نظر را به دست آورد. معادله ارتفاع به صورت

$$(1 - \Delta t^\gamma \mathcal{H})h'^{n+1} = (1 + \Delta t^\gamma \mathcal{H})h'^{n-1} + 2\Delta t(s_h^n - \Delta t s_\delta^n - \delta^{n-1}) \quad (14)$$

و معادله واگرایی نیز به صورت زیر در خواهد آمد:

$$(1 - \Delta t^\gamma \mathcal{H})\delta^{n+1} = (1 + \Delta t^\gamma \mathcal{H})\delta^{n-1} + 2\Delta t(s_\delta^n - \Delta t \mathcal{H}s_h^n - \mathcal{H}h'^{n-1}) \quad (15)$$

هنگام حل عددی معادلات بالا، به میدان باد نیز نیاز است و می‌بایست این میدان را از روی میدان‌های واگرایی و تاوایی محاسبه نمود. برای رسیدن به این منظور از روابط زیر استفاده می‌شود:

$$\nabla^\gamma \psi = \zeta, \quad \nabla^\gamma \chi = \delta$$

پس از حل معادلات بالا و به دست آمدن تابع جریان (ψ) و پتانسیل سرعت (χ) میدان مولفه‌های میدان باد را می‌توان به صورت زیر محاسبه نمود:

$$u = \frac{\partial \chi}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = \frac{\partial \chi}{\partial y} + \frac{\partial \psi}{\partial x}$$

برای آن‌که امواج گرانی هنگام حل عددی تحریک نشوند و بتوان سهم درست آنها را در طول حل عددی در نظر گرفت می‌بایست با توجه به شرط پایداری ($\sqrt{g\bar{h}}\Delta t/\Delta x \leq 1$) میزان گام زمانی را به اندازه کافی کوچک در نظر گرفت. همچنین تجربیات عددی به دست آمده نشان داده است که هنگام استفاده از روش لیپ‌فراگ برای گسسته‌سازی زمانی برای حفظ پایداری روش عددی نیاز است تا از یک پالایه زمانی تحت عنوان روبرت-آسلین^۳ استفاده شود.

در حل عددی حاضر ناحیه حل یک حوزه با مرزهای دوره‌ای مضاعف است و محدوده تغییرات هر یک از محورهای مختصات در بازه $[-\pi, \pi]$ قرار دارد. برای حل عددی $\bar{h} = 1$ ، $L_R = c/f = 0.5$ ، و $f = 4\pi$ مورد استفاده قرار گرفته است. استفاده از پارامتر کوریولیس به صورت نشان داده شده متضمن این نکته است که هر واحد از زمان برابر با یک روز است. مقدار شرایط اولیه برای میدان تاوایی پتانسیلی در نظر گرفته می‌شود و پس از آن‌که مقدار تاوایی پتانسیلی مشخص شد می‌توان سایر کمیت‌های وابسته یعنی تاوایی، ارتفاع و واگرایی را با توجه به اصل وارون‌پذیری تاوایی پتانسیلی (هاسکینز و همکاران ۱۹۸۵) و با استفاده از شرایط توازن (محب‌الحجه و دریچل ۲۰۰۱) محاسبه نمود. جزئیات مربوط به شرایط اولیه توسط دریچل و همکاران (۱۹۹۹) ارائه شده‌است.

۴ معادله تاوایی

معادله تاوایی دربرگیرنده جمله‌ای در ارتباط با امواج گرانی نیست و برای گسسته‌سازی آن می‌توان از روش‌های متفاوتی استفاده نمود. در اینجا برای گسسته‌سازی زمانی این معادله نیز از روش لپ‌فراگ استفاده می‌شود و همچنین جملات غیرخطی موجود در معادله از زمان قبل محاسبه می‌شوند. تجربیات عددی قبلی (دریچل و همکاران ۱۹۹۹) و همچنین تجربه مولفان نشان داده است که برای جلوگیری از بروز ناپایداری غیرخطی و کنترل خطای ناشی از اندرکنش جملات غیرخطی در طول حل عددی نیاز است تا مقداری پخش عددی به حل وارد شود، این هدف با اضافه‌کردن پخش به معادله تاوایی تامین می‌شود. یکی از راه‌حل‌های رایج که توسط بسیاری از محققان از جمله دریچل و همکاران (۱۹۹۹) برای معادلات آب کم‌عمق و توسط دیگران برای سایر شبیه‌سازی‌های شاره‌های تراکم‌ناپذیر دوبعدی (براتاو و همکاران ۱۹۹۲، ویس و مک‌ویلیامز ۱۹۹۳، یائو و همکاران ۱۹۹۵ و ماریوتی و همکاران ۱۹۹۴) به‌کار گرفته شده‌است، شامل اضافه کردن یک جمله فرایخش^۴ به شکل اوپلری معادله تاوایی هنگام حل عددی است. با اضافه‌کردن این جمله معادله مذکور شکل زیر را به‌خود می‌گیرد:

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = -\nabla \cdot [(\zeta + f)\mathbf{V}] - \nu(-\nabla^2)^k \zeta \quad (16)$$

در معادله بالا ضریب ν عدد بسیار کوچکی است که با توجه به تعداد نقاط شبکه و پارامترهای دیگری محاسبه می‌گردد. انتخاب توان k در جمله فرایخش اضافه‌شده به معادله تاوایی که عددی صحیح است برای روش‌های عددی مختلف متفاوت است. در واقع در یک حل عددی هرچه بتوان از توان بزرگتری استفاده نمود، میزان پخش اضافه‌شده به حل عددی کمتر خواهد بود و از دقت حل کمتر کاسته خواهد شد. ولی تجربیات به‌دست آمده نشان می‌دهند که برای یک روش معین این توان دارای محدودیت است. به‌عنوان مثال در روش‌های فشرده ترکیبی تعمیم‌یافته مرتبه ششم، آبرفشرده مرتبه ششم و فشرده مرتبه چهارم حداکثر از توان $k = 2$ می‌توان استفاده نمود، بدین معنی که استفاده از توان‌های بالاتر منجر به ناپایداری حل عددی می‌شود. در حالی‌که در روش طیفی‌وار می‌توان از توان $k = 3$ استفاده نمود.

هنگامی‌که در حل معادلات آب کم‌عمق برای روش‌های فشرده از توان ۲ و روش طیفی‌وار از توان ۳ استفاده می‌شود، دقت حل عددی به‌دست آمده با استفاده از روش طیفی‌وار بالاتر از روش‌های فشرده است. ولی سوال در اینجاست که اگر بتوان میزان پخش وارد شده به حل عددی توسط روش‌های فشرده را کمتر نمود، آیا دقت روش‌های فشرده مورد مطالعه به دقت روش طیفی‌وار نزدیک‌تر یا حتی بهتر از آن می‌شود یا خیر؟ در واقع اگر پاسخ به این سوال مثبت باشد نشان‌دهنده این مطلب است که میزان پخش عددی واردشده به حل نقش مهمی را دقت حل عددی معادلات آب کم‌عمق بازی می‌کند.

۵ پالایه فشرده

همان‌گونه که اشاره‌شده هدف تحقیق حاضر یافتن راهی است که بتوان به‌کمک آن میزان پخش عددی مورد برای حل معادلات آب کم‌عمق را در مقایسه با استفاده از جمله فرایخش بدون پدید آمدن ناپایداری غیرخطی کاهش داد. یکی از راه‌هایی که برای حذف امواج کمتر از یک طول موج معین می‌تواند مورد استفاده قرار گیرد، استفاده از پالایه^۵ می‌باشد. در اینجا نیز پس از آزمایش تعدادی از پالایه‌های عددی موجود که همخوان با روش‌های فشرده هستند، نحوه استفاده از یک پالایه فشرده به‌جای جمله فرایخش در حل عددی معادلات آب کم‌عمق مورد بررسی قرار می‌گیرد.

در ادامه به معرفی پالایه مکانی مرتبه هشتم فشرده پرداخته می‌شود. لی لی (۱۹۹۲) در مقاله خود تعدادی پالایه بر اساس روش‌های فشرده معرفی کرده است. از جمله آنها پالایه‌ای است که شکل کلی آن به‌صورت زیر بیان می‌شود:

$$\begin{aligned} \beta \tilde{F}_{j-2} + \alpha \tilde{F}_{j-1} + \tilde{F}_j + \alpha \tilde{F}_{j+1} + \beta \tilde{F}_{j+2} &= a \hat{F}_j + \frac{e}{\gamma} (\hat{F}_{j+4} + \hat{F}_{j-4}) + \frac{d}{\gamma} (\hat{F}_{j+3} + \hat{F}_{j-3}) \\ &+ \frac{c}{\gamma} (\hat{F}_{j+2} + \hat{F}_{j-2}) + \frac{b}{\gamma} (\hat{F}_{j+1} + \hat{F}_{j-1}) \end{aligned}$$

در پالایه بالا \hat{F} میدان اولیه و \tilde{F} نشان‌دهنده میدان پالایش‌شده است. حال با انتخاب‌هایی که برای ضرایب رابطه بالا وجود دارد می‌توان پالایه‌هایی را با خواص طیفی گوناگون به‌دست آورد. لی لی نشان داد برای به‌دست آوردن یک پالایه مرتبه هشتم ضرایب موجود

در رابطه بالا را می‌بایست به صورت زیر انتخاب نمود:

$$\alpha = 0.66624, \beta = 0.16688, a = 0.99965, b/2 = 0.66652, \\ c/2 = 0.16674, d/2 = 4 \times 10^{-5}, e/2 = -5 \times 10^{-6}$$

هنگام حل عددی پالایه فوق در هر دو راستای محورهای مختصات مورد استفاده قرار می‌گیرد.

۶ ارائه نتایج

در بخش حاضر به نتایج حاصل از شبیه‌سازی معادلات آب کم‌عمق با استفاده از روش‌های عددی مورد مطالعه و اثر میزان پخش عددی بر دقت حل آنها پرداخته می‌شود. بررسی مذکور از دو طریق انجام می‌گیرد. در روش اول میزان خطای تولیدشده توسط روش‌های متفاوت و در روش دوم میزان عدم‌توازن^۶ پدید آمده توسط هر یک از روش‌ها به‌عنوان ملاک سنجش مورد استفاده قرار می‌گیرد. در اینجا ابتدا به صورت خلاصه به هر یک از این روش‌ها اشاره شده و پس از آن نتایج تشریح می‌گردند.

در روش اول برای محاسبه میزان خطا توانایی روش برای پایسته نگه‌داشتن میزان جرم میان دو پرند تاوایی پتانسیلی به‌عنوان ملاک در نظر گرفته می‌شود. برای محاسبه میدان تاوایی پتانسیلی اولیه را به ناحیه‌هایی به صورت \mathcal{R}_j ($j = -N, \dots, N$) تقسیم می‌کنیم که هر کدام از این ناحیه‌ها با یک تراز q_j متناظر است. مقدار جرم در هر ناحیه به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$m_j = \iint_{\mathcal{R}_j} h dx dy$$

در حالت ایده‌آل مقدار m_j با زمان تغییر نمی‌کند ولی در عمل هنگام حل عددی به دلیل تقریب‌های واردشده مقدار m_j شروع به تغییر می‌کند و در واقع همین تغییرات برای اندازه‌گیری میزان خطای تولیدشده در طول فرایند شبیه‌سازی عددی به‌کار گرفته می‌شوند. میزان خطا در زمان t به صورت ϵ_{rms} اختلاف میان $m_j(t)$ و $m_j(0)$ تعریف می‌شود. در نتیجه این خطا (که مقدار آن توسط \bar{h} و مساحت ناحیه حل، A_{dom} ، به‌نجار شده‌است) به صورت زیر محاسبه خواهد شد:

$$\epsilon(t) = \frac{1}{\bar{h} A_{dom}} \left\{ \frac{1}{2N} \sum_j [m_j(t) - m_j(0)]^2 \right\}^{1/2} \quad (17)$$

مجموع بالا برای همه j ها به جز $j = 0$ انجام می‌شود. ناحیه \mathcal{R}_0 شامل همه ذرات شاره دارای تاوایی پتانسیلی بی‌هنجار صفر که البته از سایرین بزرگتر است، می‌باشد.

برای محاسبه m_j می‌بایست \mathcal{R}_j را با دقت بسیار خوبی مشخص نمود. مطابق با روش دریچل و همکاران (۱۹۹۹) و همچنین یائو و همکاران (۱۹۹۵) می‌بایست مقادیر q و h را به شبکه‌هایی ریزتر (2^l برابر ریزتر که در آن $l = 1, 2, 3, \dots$ است) از شبکه مورد نظر به‌عنوان مثال به شبکه‌ای ۸ برابر ریزتر، درونیایی کرد. سپس مقدار j در شبکه ریز با استفاده از نزدیکترین عدد صحیح به مقدار $(q - \bar{q})/\Delta q$ محاسبه‌شده و در این نقطه به m_j مقدار h در همین نقطه که در مساحت یک مربع از خانه‌های شبکه ریز ضرب شده، اضافه می‌شود.

در روش دوم تحلیل همان‌گونه که اشاره شد میزان عدم‌توازن ایجادشده در طول حل عددی مورد توجه قرار می‌گیرد. برای محاسبه عدم‌توازن می‌بایست ابتدا میدان‌های متوازن را محاسبه و سپس اختلاف میان میدان‌های حاصل از حل عددی و میدان‌های متوازن میزان عدم‌توازن را به دست خواهد داد. میدان‌های متوازن با وارون‌کردن میدان تاوایی پتانسیلی با استفاده از شرایط متوازن (محب‌الحجه و دریچل ۲۰۰۰، محب‌الحجه و دریچل ۲۰۰۱ و محب‌الحجه ۲۰۰۲) به دست می‌آیند. در تحقیق حاضر از شرایط متوازن $\partial^2 \delta / \partial t^2 = \partial^3 \delta / \partial t^3 = 0$ استفاده شده‌است.

برای انجام محاسبات معادلات آب کم‌عمق در یک ناحیه با مرزهای دوره‌ای مضاعف و با شرایط اولیه تشریح‌شده در قبل با استفاده از روش‌های مورد مطالعه حل می‌شوند. برای محاسبات از سه شبکه با تفکیک‌های کم ($n_g = 64$)، متوسط ($n_g = 128$) و زیاد ($n_g = 256$) استفاده شده‌است.

imbalance^۶
root mean square^۷
مقدار Δq به صورت زیر محاسبه می‌شود:^۸

$$\Delta q = \frac{q_{max} - q_{min}}{n_c + 1}$$

در رابطه بالا n_c نشان‌دهنده نواحی تاوایی پتانسیلی است که توسط n_c پرند از یکدیگر جدا شده‌اند.

شکل ۱ میزان خطای جرم را برای روش‌های مورد مطالعه با استفاده از میزان پخش متفاوت در روز پنجم انتگرال‌گیری از معادلات برحسب تفکیک نشان می‌دهد. همچنین نتایج حاصل از روش مرتبه دوم مرکزی نیز علاوه بر سایر روش‌ها ارائه شده‌است. با توجه به شکل مشاهده می‌شود که روش مرتبه دوم مرکزی فاصله زیادی با سایر روش‌ها دارد. نتایج روش فشرده مرتبه چهارم با استفاده از جمله فرایخس با توان $k_i = 2$ نشان داده شده‌اند. همان‌گونه که مشاهده می‌شود نتایج این روش نسبت به سایر روش‌های فشرده و همچنین روش طیفی‌وار از دقت کمتری برخوردار است. نتایج مربوط به روش آبرفشرده مرتبه ششم برای دو حالت نشان داده شده‌اند. در حالت اول از جمله فرایخس با توان $k_i = 2$ استفاده شده‌است، نتایج نشان می‌دهند که روش آبرفشرده مرتبه ششم با میزان پخش حاضر اگرچه نسبت به روش فشرده مرتبه چهارم نتایج دقیق‌تری را به دست می‌دهد ولی از دیدگاه دقت عددی نسبت به روش طیفی‌وار ضعیف‌تر عمل می‌کند. در شبیه‌سازی حاضر در روش طیفی‌وار که به‌عنوان مرجع در نظر گرفته می‌شود از جمله فرایخس با توان $k_i = 3$ استفاده شده‌است. در حالت ایده‌آل انتظار می‌رود که نتایج روش آبرفشرده مرتبه ششم و روش طیفی‌وار در شبکه‌های با تفکیک بالا بسیار به یکدیگر نزدیک باشند. یکی از دلایل اختلاف موجود می‌تواند ناشی از توان‌های متفاوت در جمله فرایخس در دو روش باشد، آزمایش‌های عددی نشان داده‌اند که امکان استفاده از جمله فرایخس با توان $k_i = 3$ در روش‌های فشرده مورد مطالعه در تحقیق حاضر وجود ندارد و استفاده از این جمله با توان مذکور منجر به ایجاد ناپایداری در حل عددی می‌گردد.

همان‌طور که در قبل اشاره شد یک راه‌حل جایگزین استفاده از پالایه فشرده معرفی شده می‌باشد. در شکل ۱ نتایج حاصل از روش آبرفشرده با به‌کارگیری پالایه فشرده مرتبه هشتم به‌جای جمله فرایخس نیز نشان داده شده‌است. شکل نشان می‌دهد که استفاده از پالایه مذکور منجر به افزایش دقت روش آبرفشرده مرتبه ششم نسبت به روش طیفی‌وار شده‌است. نتیجه به‌دست آمده حاوی نکته مهمی است بدین معنی که در روش‌های با توانایی تفکیک بالا (یعنی دارای حداقلی از دقت باشند که در تحقیق حاضر مرتبه ششم می‌باشد) میزان پخش عددی اضافه‌شده به حل دارای نقش اساسی در دقت حل می‌باشد. شکل مذکور علاوه بر روش آبرفشرده نتایج حاصل از روش فشرده ترکیبی تعمیم‌یافته مرتبه ششم را نیز با به‌کارگیری پالایه ذکرشده نشان می‌دهد. برای این روش نیز روندی مشابه با روش آبرفشرده مشاهده می‌شود. همان‌گونه که شکل نشان می‌دهد نتایج این روش نسبت به روش طیفی‌وار از دقت بالاتری برخوردار هستند و بعلاوه به‌علت دقت بالاتر این روش نسبت به روش آبرفشرده مرتبه ششم، نتایج به‌دست آمده از روش مذکور دقیق‌تر هستند. این نتیجه نشان می‌دهد که به ازای یک میزان پخش معین در حل عددی روشی که دارای دقت بالاتری است، دقیق‌تر عمل می‌کند. همچنین شکل ۲ تحول زمانی خطای جرم را برای روش‌های متفاوت در شبکه با تفکیک ۱۲۸ نشان می‌دهد، این شکل نیز موید نتایج بالا می‌باشد.

شکل ۳ مقدار عدم‌توازن را در روز پنجم انتگرال‌گیری برای روش‌های متفاوت برحسب تفکیک نشان می‌دهد. عدم‌توازن به‌کمک τ_2 بردار عدم‌توازن به‌صورت زیر محاسبه شده‌است:

$$\|X\|_{\text{imb}}^2 = \left(\frac{2\pi}{n_g}\right)^2 \sum_{i,j=1}^{n_g} \frac{1}{4} (|V_{\text{imb}}|^2 + gh_{\text{imb}}^2)$$

در رابطه بالا بردار V نشان‌دهنده بردار سرعت افقی است.

در شکل ۳ نتایج مربوط به روش‌های مرتبه دوم مرکزی، فشرده مرتبه چهارم، آبرفشرده مرتبه ششم، فشرده ترکیبی تعمیم‌یافته مرتبه ششم و طیفی‌وار نشان داده شده‌اند. شکل موید این نکته است که از دیدگاه عدم‌توازن نیز روش مرتبه دوم مرکزی عملکرد بسیار ضعیفی دارد. بعلاوه شکل نشان می‌دهد که روش‌های فشرده در مقایسه با روش طیفی‌وار در شبکه‌های متفاوت عدم‌توازن کمتری تولید می‌کنند. اختلاف میان روش‌های فشرده با یکدیگر کم است و با روش طیفی‌وار اختلاف قابل توجهی دارد. همچنین میزان اختلاف با افزایش تفکیک کاهش می‌یابد.

برای آنکه بتوان در مورد نحوه رفتار عدم‌توازن آگاهی بیشتری پیدا کرد، در شکل‌های ۴ تا ۶ مقدار عدم‌توازن روش‌های متفاوت برحسب زمان برای تفکیک‌های متفاوت رسم شده‌است. شکل‌های مذکور نشان می‌دهند که میزان عدم‌توازن در ابتدای تحول زمانی میدان حل یکسان است ولی تقریباً از روز سوم انتگرال‌گیری به بعد که در واقع گرادیان‌های شدید در حل عددی ظاهر می‌شوند، روند تغییرات عدم‌توازن در روش طیفی‌وار از روش‌های فشرده فاصله می‌گیرد. در اینجا نیز تولید عدم‌توازن کمتر توسط روش‌های فشرده برای همه زمان‌ها مشهود است. در واقع با کنار گذاشتن روش مرتبه دوم مرکزی می‌توان به این نکته اشاره نمود که با توجه به شکل‌های مذکور، روش‌های مورد مطالعه به دو شاخه کلی از دیدگاه عدم‌توازن تقسیم می‌شوند که یک شاخه مربوط به روش طیفی‌وار است و شاخه دیگر نماینده روش‌های فشرده است که رفتاری تقریباً مشابه با یکدیگر دارند.

۷ نتیجه‌گیری

در تحقیق حاضر اثر پخش عددی بر دقت حل عددی شکل اویلری معادلات آب کم‌عمق با استفاده از روش‌های با توانایی تفکیک بالا مورد بررسی قرار گرفت. همچنین علاوه بر اضافه‌کردن جمله فرایخس به معادله تاوایی امکان استفاده از یک پالایه فشرده مرتبه هشتم

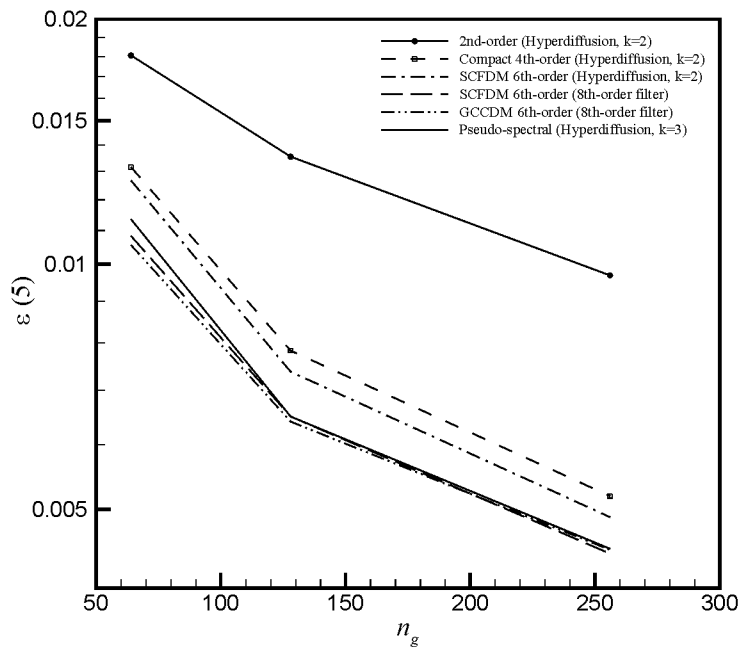
به‌جای جمله مذکور هنگام اعمال روش‌های آبرفشده و فشده ترکیبی تعمیم‌یافته مرتبه ششم، مورد توجه قرار گرفت. نتایج به‌دست آمده نشان می‌دهند که هنگام شبیه‌سازی عددی معادلات آب کم‌عمق با استفاده از روش‌های فشده و طیفی‌وار اگر روش دارای حداقلی از دقت (در اینجا مرتبه ششم) باشد، میزان پخش عددی اضافه‌شده به حل دارای نقش اساسی در دقت حل می‌باشد. همچنین با استفاده از پالایه فشده معرفی‌شده نتایج حاصل از روش‌های آبرفشده مرتبه ششم و فشده ترکیبی تعمیم‌یافته مرتبه ششم نسبت به روش طیفی‌وار از دقت بالاتری برخوردار می‌گردند. بررسی نتایج حاصل، از دیدگاه عدم‌توازن نشان می‌دهد که روش‌های فشده در مقایسه با روش طیفی‌وار هنگام حضور گرادیان‌های شدید در میدان حل عددی، میزان عدم‌توازن کمتری تولید می‌کنند.

تشکر و قدردانی

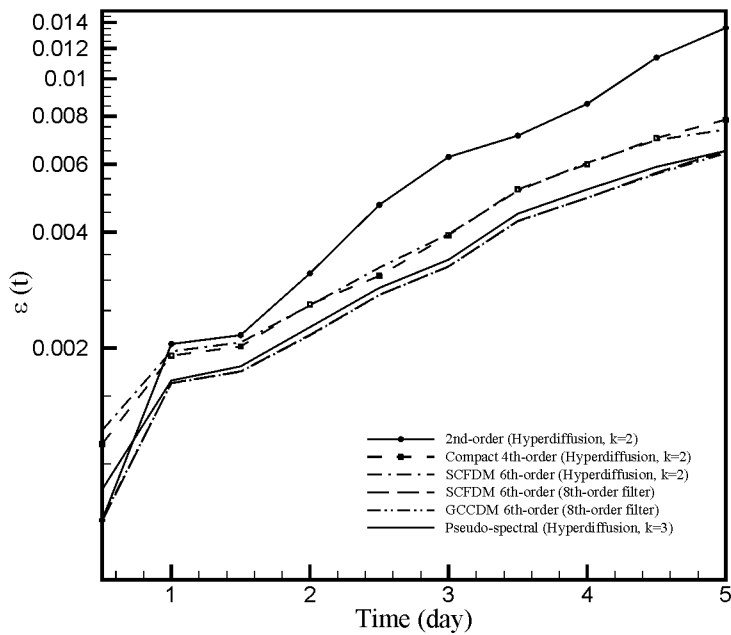
نویسندگان از دانشگاه تهران و پژوهشگاه هواشناسی و علوم جو به‌واسطه حمایت از این کار تحقیقاتی تشکر می‌نمایند. همچنین از جناب آقای دکتر محب‌الحجه برای در اختیار قرار دادن برنامه‌های محاسبه عدم‌توازن سپاسگزاری می‌شود.

مراجع

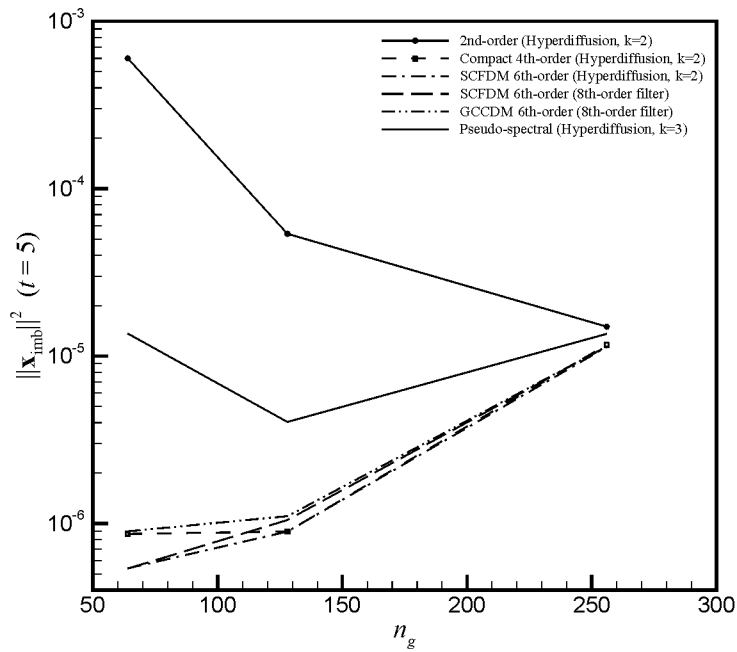
- 1- Boratav O. N., Pelz R. B., and Zabusky N. J., 1992: Reconnection in Orthogonally Interacting Vortex Tubes: Direct Numerical Simulations and Quantifications, *Phys. Fluids A*, Vol. 4, (3), 581–605
- 2- Dritschel D. G., Polvani L. M. and Mohebalhojeh A. R., 1999: The Contour-Dvective Semi-Lagrangian Algorithm for the Shallow Water Equations, *Mon. Wea. Rev.*, Vol. 127, 1552–1565.
- 3- Esfahanian V., Ghader S., and Mohebalhojeh A. R., 2005: On the Use of Super Compact Scheme for Spatial Differencing in Numerical Models of the Atmosphere, *Q. J. Roy. Meteorol. Soc.*, 131, 2109–2130.
- 4- Ghader S., and Esfahanian V., 2006: Generalized Combined Compact Differencing Method, *WSEAS Transactions on Fluid Mechanics*, Vol. 1, Issue 5, 445-449.
- 5- Hoskins B. J., McIntyre M. E., and Robertson A. W., 1985: On the Use and Significance of Isentropic Potential-Vorticity Maps, *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, Vol. 111, 877–946.
- 6- Lele S. K., 1992: Compact Finite Difference Schemes with Spectral-like Resolution. *J. Comput. Phys.*, 103, pp. 16-42.
- 7- Mariotti A., Legars B., and Dritschel D. G., 1994: Vortex Stripping and the Erosion of Coherent Structures in Two-Dimensional Flows, *Phys. Fluids*, Vol. 6, (12), 3954–3962
- 8- Mohebalhojeh, A. R. and Dritschel, D. G., 2000: On the Representation of Gravity Waves in Numerical Models of the Shallow Water Equations. *Q. J. Roy. Meteorol. Soc.*, 126, 669–688
- 9- Mohebalhojeh A. R., and Dritschel D. G., 2001: Hierarchies of Balance Conditions of the f -Plane Shallow Water Equations, *J. Atmos. Sci.*, Vol. 58(16), 2411–2426.
- 10- Mohebalhojeh A. R., 2002: On Shallow Water Potential Vorticity Inversion by Rossby Number Expansion, Equations. *Q. J. Roy. Meteorol. Soc.*, 128, 679–694
- 11- Ritchie, H., 1988: Application of the Semi-Lagrangian Method to a Spectral Model of the Shallow Water Equations, *Mon. Wea. Rev.*, Vol. 116, 1687–1598.
- 12- Weiss J. B., and McWilliams J. C., 1993: Temporal Scalling Behavior of Decaying Two-Dimensional Turbulence, *Phys. Fluids A*, Vol. 5, (3), 608–621
- 13- Yao H. B., Dritschel D. G., and Zabusky N. J., 1995: High-Gradient Phenomena in 2D Vortex Interactions, *Phys. Fluids*, Vol. 7, 539–548.



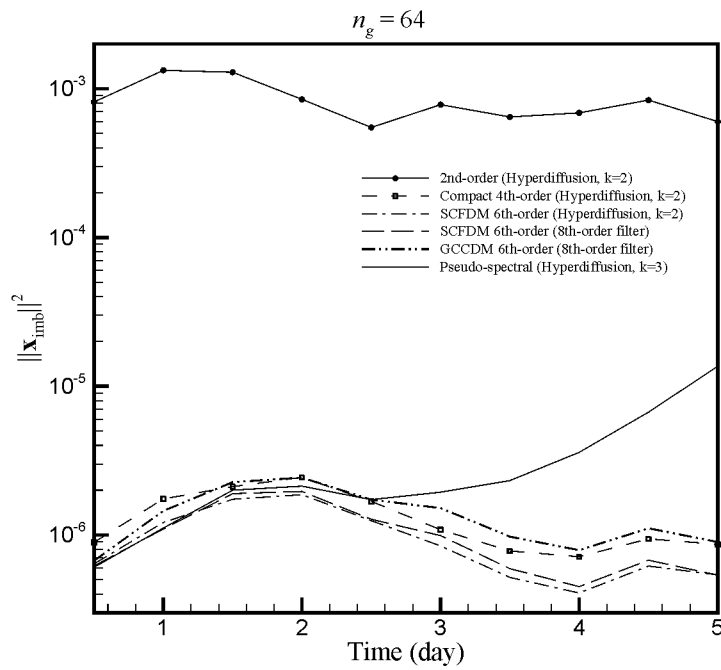
شکل ۱: خطای جرم در روز پنجم انتگرال‌گیری از معادلات برای روش‌های متفاوت برحسب تفکیک



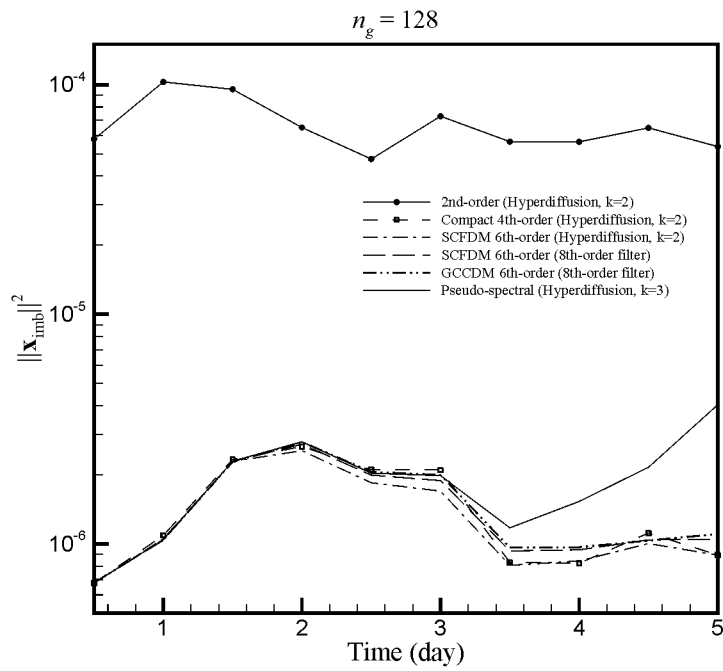
شکل ۲: تحول زمانی خطای جرم برای روش‌های متفاوت در شبکه با تفکیک ۱۲۸



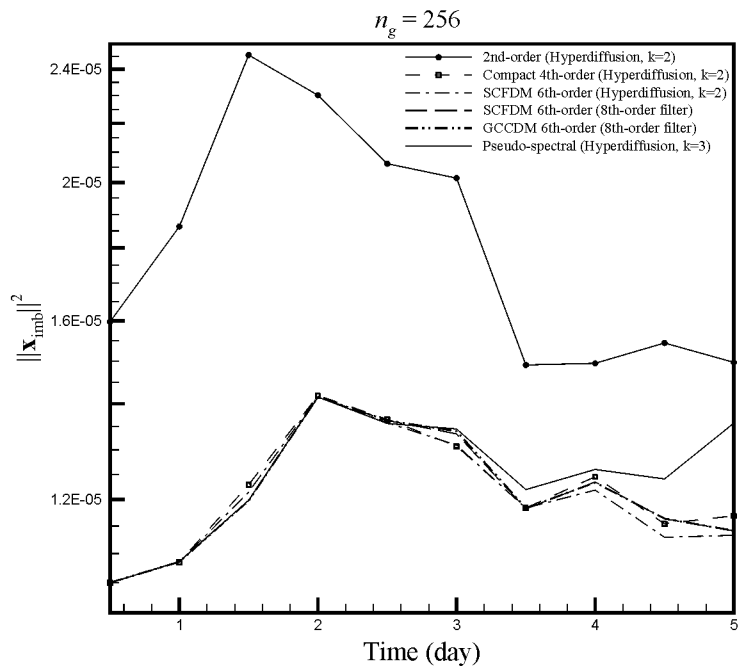
شکل ۳: مقدار عدم توازن تولیدشده توسط روش‌های متفاوت در روز پنجم انتگرال‌گیری از معادلات برحسب تفکیک



شکل ۴: تحول زمانی عدم توازن برای روش‌های متفاوت در شبکه با تفکیک ۶۴



شکل ۵: تحول زمانی عدم‌توازن برای روش‌های متفاوت در شبکه با تفکیک ۱۲۸



شکل ۶: تحول زمانی عدم‌توازن برای روش‌های متفاوت در شبکه با تفکیک ۲۵۶